

Junger

Technischer Bericht Nr. 61

Zur Berechnung der Eigenschwingungen
ungedämpfter Drehschwingersysteme

von

Dipl.-Ing. R. PRIEBS

B e r l i n
1 9 6 2

Zur Berechnung der Eigenschwingungen ungedämpfter Dreh-
schwingersysteme

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Weiterführung der vorangegangenen Arbeit des Verfassers: "Ein einfaches Rechenschema zur Aufstellung der Frequenzgleichung eines an den Enden freien Drehschwingers" (Ing.-Arch. 30 (1961), S. 141). Es werden allgemein anwendbare Methoden zur Berechnung der Eigenschwingungen unverzweigter und verzweigter Drehschwingersysteme angegeben. Im Vordergrund steht die explizite Ermittlung der Frequenzgleichung als rationale Funktion des Frequenzquadrates $z = \omega^2$. Zwei Rechenschemata dienen zur raschen Aufstellung der erforderlichen expliziten Ausdrücke. Die Vorteile dieser Methoden gegenüber anderen werden im letzten Abschnitt erläutert.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. Priebis

(Dipl.-Ing.R.Priebis)

Der Abteilungsleiter

gez. Matthieu

(Prof.Dr.phil.P.Matthieu)

Der Institutsdirektor

gez. Gundlach

(Prof.Dr.-Ing.F.W.Gundlach)

Berlin-Charlottenburg, den 14. März 1962

1. Grundlagen

Wir gehen von einem Drehschwinger aus wie ihn Abb.1 zeigt und den wir im folgenden "Elementarsystem" nennen. Das Elementarsystem besteht aus $n+1$ Scheiben mit den Massenträgheitsmomenten Θ_λ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, n$), die elastisch verbunden sind durch n Wellenstücke mit den Torsionssteifigkeiten c_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$). Die Bewegungen der Drehmassen Θ_λ beschreibt der Winkel ϑ_λ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, n$). In den Wellenstücken sind die Drehmomente D_λ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, n+1$) wirksam; D_0 bzw. D_{n+1} denken wir uns an der ersten bzw. letzten Drehmasse angreifend. Randbedingungen berücksichtigen wir erst in Abschnitt 3.

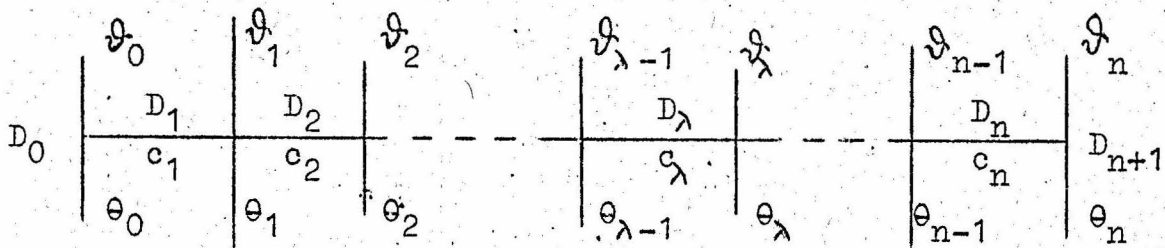


Abb.1: Das Elementarsystem

Bekanntlich lassen sich die Eigenschwingungen eines solchen Schwingers aus den dynamischen Gleichungen

$$\Theta_\lambda \ddot{\vartheta}_\lambda = D_\lambda - D_{\lambda+1} \quad (1)$$

und den elastischen Gleichungen

$$D_\lambda = c_\lambda (\vartheta_{\lambda-1} - \vartheta_\lambda) \quad (2)$$

ermitteln, indem man für die Winkel und Momente die harmonischen Ansätze

$$\vartheta_\lambda = u_\lambda \cos \omega t \quad \text{bzw.} \quad D_\lambda = x_\lambda \cos \omega t \quad (3)$$

macht: Wird zur Abkürzung

$$z = \omega^2 \quad (4)$$

gesetzt und aus Gründen der angenehmeren Schreibweise die Torsionssteifigkeit c_λ durch die Torsionsnachgiebigkeit

$$h_{\lambda} = \frac{1}{c_{\lambda}} \quad (5)$$

ersetzt, so folgen mit (3), (4) und (5) aus (1) und (2) die bekannten Rekursionsformeln von Holzer-Tolle:

$$\left. \begin{aligned} x_{\lambda+1} &= x_{\lambda} + u_{\lambda} \theta_{\lambda} z, \\ u_{\lambda} &= u_{\lambda-1} - x_{\lambda} h_{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ausgeschrieben für $\lambda = 0, 1, 2, \dots, n$ lauten sie:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + u_0 \theta_0 z, \\ u_1 &= u_0 - x_1 h_1, \\ x_2 &= x_1 + u_1 \theta_1 z, \\ u_2 &= u_1 - x_2 h_2, \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} - x_n h_n, \\ x_{n+1} &= x_n + u_n \theta_n z. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wenn die Werte x_0 , u_0 und z bekannt sind, können sofort sämtliche Momente und Winkel nacheinander berechnet werden. Im nächsten Abschnitt werden wir Aussagen über diese drei Größen machen. Hier wollen wir die Rekursionsbeziehungen (7) zur Aufstellung zweier Rechenschemata benutzen, die auf sehr einfache Weise die Berechnung aller x_{λ} und u_{λ} in Abhängigkeit der drei Größen x_0 , u_0 und z gestatten. Da es beim numerischen Rechnen zweckmäßig ist, dimensionslose Werte zu benutzen, schreiben wir die Massenträgheitsmomente θ_{λ} als θ'_{λ} -fache eines beliebig wählbaren Bezugsmassenträgheitsmomentes θ^* und die Torsionsnachgiebigkeiten h_{λ} als h'_{λ} -fache einer beliebig wählbaren Torsionsnachgiebigkeit h^* . Es ist also

$$\theta_{\lambda} = \theta'_{\lambda} \theta^*, \quad h_{\lambda} = h'_{\lambda} h^* \quad \text{bzw.} \quad c_{\lambda} = c'_{\lambda} c^* \quad \text{mit} \quad c^* = \frac{1}{h^*} \quad (8)$$

Außerdem führen wir ein:

$$\zeta = \theta^* h^* z \quad \text{und} \quad p = \frac{1}{h^*} \zeta, \quad (9)$$

so daß wegen (4) gilt

$$\omega = \sqrt{z} = \sqrt{\frac{1}{\theta^* h^*} \zeta}. \quad (10)$$

Bei der Durchrechnung der Gleichungen (7) entstehen nun unter Benutzung dieser Abkürzungen für die x_λ und u_λ folgende Ausdrücke:

$$x_\lambda = x_\lambda(z) = x_\lambda(\zeta) = x_0 \alpha_\lambda(\zeta) + u_0 A_\lambda(\zeta), \quad (11.1)$$

$$u_\lambda = u_\lambda(z) = u_\lambda(\zeta) = x_0 B_\lambda(\zeta) + u_0 B_\lambda(\zeta). \quad (11.2)$$

Die α_λ , A_λ , B_λ und B_λ sind Polynome in ζ bzw. z ; die α_λ und B_λ treten stets in Verbindung mit dem Faktor x_0 auf, die A_λ und B_λ stets in Verbindung mit dem Faktor u_0 . Die Koeffizienten der Polynome setzen sich aus den bekannten θ_λ und c_λ zusammen. Wenn man sie explizit berechnet, entstehen sehr komplizierte Ausdrücke. Da uns nur die Zahlenwerte der Koeffizienten bei gegebenen θ_λ und c_λ interessieren, brauchen wir die Koeffizienten nicht in expliziter Form. Wir stellen Rekursionsbeziehungen zwischen den Koeffizienten auf und können diese zu den erwähnten beiden Rechenschemata zusammenfassen, mit denen die Koeffizienten dann rasch zu berechnen sind. - Der Aufbau der Polynome geht aus (12.1) bis (12.4) hervor.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(\zeta) &= 1, \\ \alpha_2(\zeta) &= 1 - \alpha'_{21}\zeta, \\ \alpha_3(\zeta) &= 1 - \alpha'_{31}\zeta + \alpha'_{32}\zeta^2, \\ &\vdots \\ \alpha_{n+1}(\zeta) &= 1 - \alpha'_{n+1,1}\zeta + \alpha'_{n+1,2}\zeta^2 - \dots + (-1)^{n+1} \alpha'_{n+1,n}\zeta^n. \end{aligned} \right\} (12.1)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1(\zeta) &= -h^* B'_{20}, \\ B_2(\zeta) &= -h^* (B'_{30} - B'_{31}\zeta), \\ B_3(\zeta) &= -h^* (B'_{40} - B'_{41}\zeta + B'_{42}\zeta^2), \\ &\vdots \\ B_n(\zeta) &= -h^* (B'_{n+1,0} - B'_{n+1,1}\zeta + \dots + (-1)^n B'_{n+1,n-1}\zeta^{n-1}). \end{aligned} \right\} (12.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1(\zeta) &= p A'_{11}, \\ A_2(\zeta) &= p (A'_{21} - A'_{22}\zeta), \\ A_3(\zeta) &= p (A'_{31} - A'_{32}\zeta + A'_{33}\zeta^2), \\ &\vdots \\ A_{n+1}(\zeta) &= p (A'_{n+1,1} - A'_{n+1,2}\zeta + \dots - (-1)^{n+1} A'_{n+1,n+1}\zeta^n). \end{aligned} \right\} (12.3)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1(\zeta) &= 1 - B_{21}^1 \zeta, \\ B_2(\zeta) &= 1 - B_{31}^1 \zeta + B_{32}^1 \zeta^2, \\ B_3(\zeta) &= 1 - B_{41}^1 \zeta + B_{42}^1 \zeta^2 - B_{43}^1 \zeta^3, \\ &\vdots \\ B_n(\zeta) &= 1 - B_{n+1,1}^1 \zeta + B_{n+1,2}^1 \zeta^2 - \dots + (-1)^n B_{n+1,n}^1 \zeta^n. \end{aligned} \right\} (12.4)$$

Die Koeffizienten wurden zur besseren Unterscheidung von der Kurz kennzeichnung der Polynome mit einem Strich versehen. Ihr erster Index soll auf die Anzahl der Drehmassen hinweisen, ihr zweiter auf die zugehörige Potenz von ζ .

Aus (7) mit (8) bis (12.4) können jetzt, ähnlich wie in der ersten Arbeit des Verfassers (s. Zusammenfassung), die Rekursionsbeziehungen hergeleitet werden. Sie sind durch eine besondere Umrahmung gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \alpha_1(\zeta) + u_0 A_1(\zeta) = x_0 + u_0 p A_{11}^1, \\ &= x_0 + u_0 \theta_0 z = x_0 + u_0 \theta_0^* z = x_0 + u_0 p \theta_0^1, \end{aligned}$$

$$\text{also } \boxed{A_{11}^1 = \theta_0^1} \quad (14.0)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= x_0 \beta_1(\zeta) + u_0 B_1(\zeta) = x_0 (-h^* B_{20}^1) + u_0 (1 - B_{21}^1 \zeta), \\ &= u_0 - x_1 h_1 = u_0 - h_1 (x_0 + u_0 p A_{11}^1), \\ &= x_0 (-h^* h_1^1) + u_0 (1 - h_1^1 A_{11}^1 \zeta), \end{aligned}$$

$$\text{also } \boxed{B_{20}^1 = h_1^1} \quad \text{und} \quad \boxed{B_{21}^1 = h_1^1 A_{11}^1} ; (13.1) \text{ bzw. } (14.1)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 \alpha_2(\zeta) + u_0 A_2(\zeta) = x_0 (1 - \alpha_{21}^1 \zeta) + u_0 p (A_{21}^1 - A_{22}^1 \zeta), \\ &= x_1 + u_1 \theta_1 z = x_0 + u_0 p A_{11}^1 + \theta_1 z (x_0 (-h^* B_{20}^1) + u_0 (1 - B_{21}^1 \zeta)), \\ &= x_0 (1 - \theta_1 z h^* B_{20}^1) + u_0 (\theta_1 z + p A_{11}^1 - \theta_1 z B_{21}^1 \zeta), \\ &= x_0 (1 - \theta_1^1 B_{20}^1 \zeta) + u_0 p ((A_{11}^1 + \theta_1^1) - \theta_1^1 B_{21}^1 \zeta), \end{aligned}$$

$$\text{also } \boxed{\alpha_{21}^1 = \theta_1^1 B_{20}^1} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{aligned} A_{21}^1 &= A_{11}^1 + \theta_1^1 \\ A_{22}^1 &= \theta_1^1 B_{21}^1 \end{aligned}} \quad (13.2) \text{ bzw. } (14.2)$$

Die Fortführung dieser Rechnungen liefert:

$$\boxed{\begin{aligned} B_{30}^1 &= B_{20}^1 + h_2^1 \\ B_{31}^1 &= h_2^1 \alpha_{21}^1 \end{aligned}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{aligned} B_{31}^1 &= B_{21}^1 + h_2^1 A_{21}^1 \\ B_{32}^1 &= h_2^1 A_{22}^1 \end{aligned}} ; (13.3) \text{ bzw. } (14.3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{31}^1 &= \alpha_{21}^1 + \theta_2^1 B_{30}^1 \\ \alpha_{32}^1 &= \theta_2^1 B_{31}^1 \end{aligned}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{aligned} A_{31}^1 &= A_{21}^1 + \theta_2^1 \\ A_{32}^1 &= A_{22}^1 + \theta_2^1 B_{31}^1 \\ A_{33}^1 &= \theta_2^1 B_{32}^1 \end{aligned}} ; (13.4) \text{ bzw. } (14.4)$$

$$\begin{aligned} B_{40} &= B_{30} + h_3 \\ B_{41} &= B_{31} + h_3 \alpha_{31} \\ B_{42} &= h_3 \alpha_{32} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B_{41} &= B_{31} + h_3 A_{31} \\ B_{42} &= B_{32} + h_3 A_{32} \\ B_{43} &= h_3 A_{33} \end{aligned}$$

(13.5) bzw. (14.5)

$$\begin{aligned} \alpha_{41} &= \alpha_{31} + \frac{1}{3} B_{40} \\ \alpha_{42} &= \alpha_{32} + \frac{1}{3} B_{41} \\ \alpha_{43} &= \frac{1}{3} B_{42} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_{41} &= A_{31} + \frac{1}{3} \\ A_{42} &= A_{32} + \frac{1}{3} B_{41} \\ A_{43} &= A_{33} + \frac{1}{3} B_{42} \\ A_{44} &= \frac{1}{3} B_{43} \end{aligned}$$

(13.6) bzw. (14.6)

Die aus den Rekursionsbeziehungen (13.1) bis (14.6) ersichtlichen Gesetzmäßigkeiten gestatten schließlich die Aufstellung des "α,β-Rechenschemas" (Tab.1) und des "A,B-Rechenschemas" (Tab.2). Dazu soll noch bemerkt werden, daß die Addition der beiden in einem Kästchen stehenden Größen die unter dem Kästchen stehende Größe ergibt (vgl. (13.1) bis (14.6)).

$B_{20}=h_1$	$\alpha_{21}=\frac{1}{2}B_{20}$	$\frac{1}{2}$			
h_2	$\frac{1}{2}B_{30}$	$\frac{1}{2}$			
B_{30}	α_{31}	$B_{31}=h_2\alpha_{21}$	$\alpha_{32}=\frac{1}{2}B_{31}$		
h_3	$\frac{1}{3}B_{40}$	$h_3\alpha_{31}$	$\frac{1}{3}B_{41}$		
B_{40}	α_{41}	B_{41}	α_{42}	$B_{42}=h_3\alpha_{32}$	$\alpha_{43}=\frac{1}{3}B_{42}$

Tabelle 1:
Das α,β-Rechenschema.

$A_{11} = 0$ 0		<div>Tabelle 2:</div> <div>Das A,B-Rechenschema.</div>			
h_1					
A_{21} 0	$B_{21} = h_1 A_{11}$ $h_2 A_{21}$	$A_{22} = 0$ 0	B_{21} 0	h_2	
A_{31} 0	B_{31} $h_3 A_{31}$	A_{32} 0	B_{31} 0	$h_3 A_{32}$	$A_{33} = 0$ 0
A_{41}	B_{41}	A_{42}	B_{42}	A_{43}	$B_{43} = h_3 A_{33}$ $A_{44} = 0$ 0

Tabelle 2:
Das A,B-Rechenschema.

Bei der numerischen Rechnung genügt es, leere Formblätter etwa in der Art der Tabellen 3 und 4 zu benutzen. Beim Ausfüllen der Formblätter wird es nur zu Anfang nötig sein, das jeweilige Rechenschema daneben zu legen, um sicherer rechnen zu können. Uebersichtlichkeit und mechanischer Ablauf der Rechenoperationen prägen sich schnell ein.

$h_1' = \dots$		$\theta_1' = \dots$			
$h_2' = \dots$		$\theta_2' = \dots$			
$h_3' = \dots$				$\theta_3' = \dots$	

Tabelle 3:
Formblatt für die Anwendung des α, β -Rechenschemas

$\theta_0' = \dots$						
$\theta_1' = \dots$	$h_1' = \dots$					
$\theta_2' = \dots$			$h_2' = \dots$			
$\theta_3' = \dots$					$h_3' = \dots$	

Tabelle 4:
Formblatt für die Anwendung des A,B-Rechenschemas.

2. Unverzweigte Drehschwingersysteme.

a) Aufstellung der Frequenzgleichung

Hier benötigen wir die am Ende eines Elementarsystems gültigen Beziehungen (vgl. (11.1) und (11.2)):

$$x_{n+1} = x_0 \alpha_{n+1} + u_0 A_{n+1}, \quad (15.1)$$

$$u_n = x_0 \beta_n + u_0 B_n. \quad (15.2)$$

Die Polynome α_{n+1} , A_{n+1} , β_n und B_n können wir uns bei zahlenmäßig gegebenen θ_λ' und h_λ' sehr schnell mit Hilfe der Rechenschemata beschaffen.

Betrachten wir z.B. einen beidseitig freien Drehschwinger nach Abb. 2. Er ist ein Elementarsystem mit den Randbedingungen $D_0 = 0$ und $D_{n+1} = 0$ bzw. $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = 0$. Aus (15.1) folgt daher die Beziehung $u_0 A_{n+1} = 0$. Diese Gleichung ist nur für bestimmte Werte von ζ erfüllt, wenn man $u_0 \neq 0$ voraussetzt. Diese Werte ζ_i ($i = 0, 1, \dots, n$) sind die Eigenwerte des Schwingers, aus denen man mit (10) seine Eigenfrequenzen bestimmen kann. $A_{n+1} = 0$ ist die Frequenzgleichung des beidseitig freien Drehschwingers. - Die Frequenzgleichungen von Elementarsystemen mit anderen Randbedingungen kann man den Abbildungen 3 bis 5 entnehmen; sie entstehen ganz analog aus den Gleichungen (15.1) und (15.2). - Man

beachte, daß für ein Elementarsystem mit bestimmten Randbedingungen nur ein Rechenschema aufgestellt werden muß!

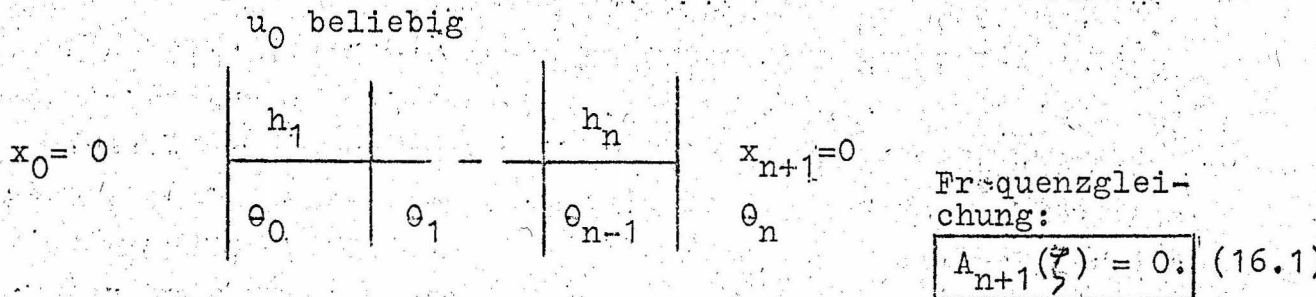


Abb. 2: Beidseitig freier Drehschwinger.

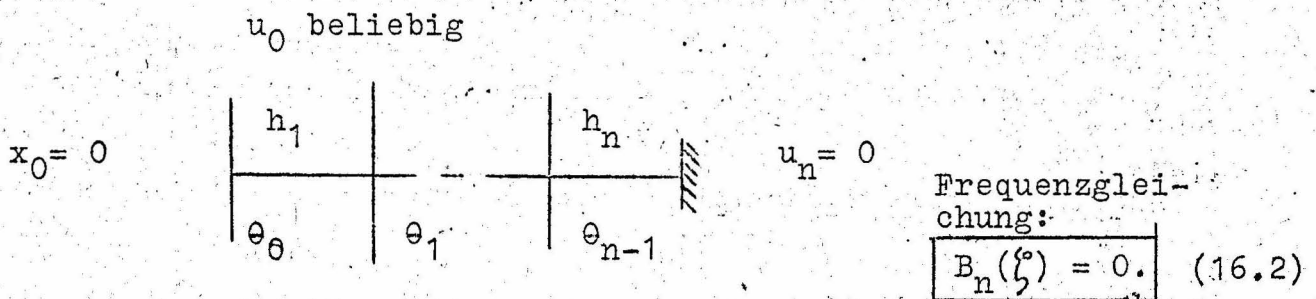


Abb. 3: "Rechts" eingespannter Drehschwinger.

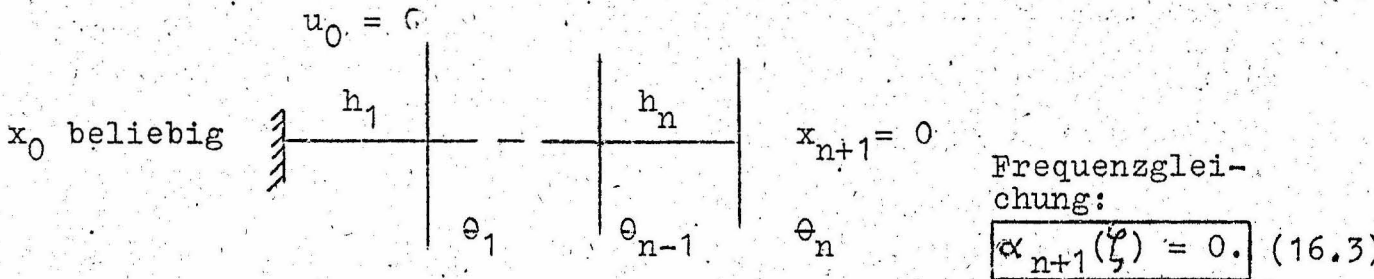


Abb. 4: "Links" eingespannter Drehschwinger.

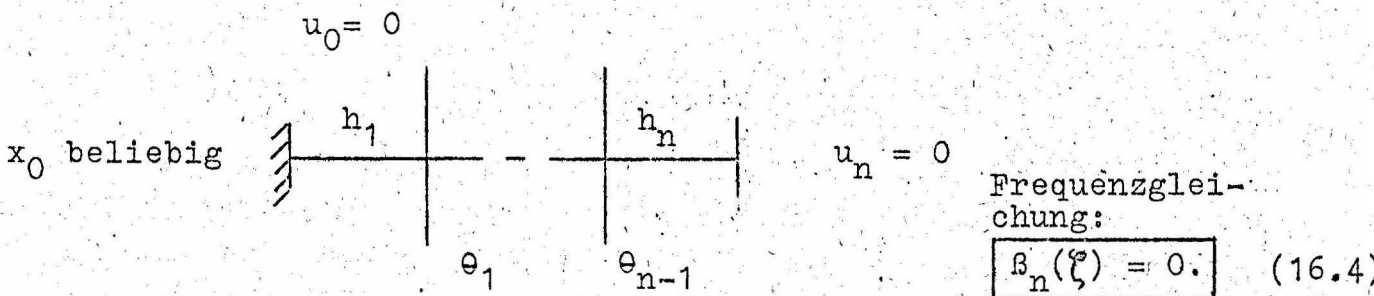


Abb. 5: Beidseitig eingespannter Drehschwinger.

b) Lösung der Frequenzgleichung

Im allgemeinen wird man die Nullstellen ζ_i am schnellsten durch die Kombination von Horner Schema und Newtonscher Wurzelverbesserung¹⁾ erreichen. Als Näherungswert für die (i+1)-te Wurzel kann dabei die vorangegangene i-te Wurzel benutzt werden, wobei man mit der Näherung $\zeta_i = 0$ beginnt und natürlich jedesmal mit der so gefundenen Wurzel reduziert, sobald diese in der erforderlichen Genauigkeit vorliegt. Die Reduktion ist bei Benutzung des Horner Schemas sehr einfach! Durch dieses systematische Vorgehen ist es nicht, wie z.B. bei Holzer-Tolle, notwendig, durch Probieren die Nullstellen aufzusuchen, sondern die gute Konvergenz des Verfahrens führt rasch zur Grundfrequenz, von dieser wiederum zur Eigenfrequenz der ersten Oberschwingung usw.

c) Ausschlags- und Momentenverlauf

Er kann mit Hilfe der Gleichungen (11.1) bzw. (11.2) berechnet werden: Die Polynome α_λ , A_λ , β_λ und B_λ entnimmt man dem jeweiligen Rechenschema; ihre Werte für einen bestimmten Eigenwert ζ_i berechnet man zweckmässigerweise mit dem Horner Schema. Je nach der Randbedingung am Anfang des Elementarsystems erhält man für die Ausschläge entweder

$$u_\lambda = x_0 \beta_\lambda(\zeta_i) \text{ oder } u_\lambda = u_0 B_\lambda(\zeta_i) \quad (17.1)$$

bzw. für die Momente entweder

$$x_\lambda = x_0 \alpha_\lambda(\zeta_i) \text{ oder } x_\lambda = u_0 A_\lambda(\zeta_i). \quad (17.2)$$

Die einzelnen Ausschläge und Momente ergeben sich also stets als Vielfache des freien Parameters u_0 bzw. x_0 .

3. Verzweigte Drehschwingersysteme

a) Allgemeines

Die Abbildungen 6 bis 9 zeigen Beispiele für verzweigte Drehschwingersysteme. Die in diesen Abbildungen durch eine dickere Strichstärke hervorgehobenen Drehmassen sollen Zahnräder darstellen, die spielfrei ineinandergreifen. Derartige Stellen wollen wir Verzweigungsstellen nennen.

¹⁾ Vgl. R. Zuhrmühl, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, S. 42 ff., 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957

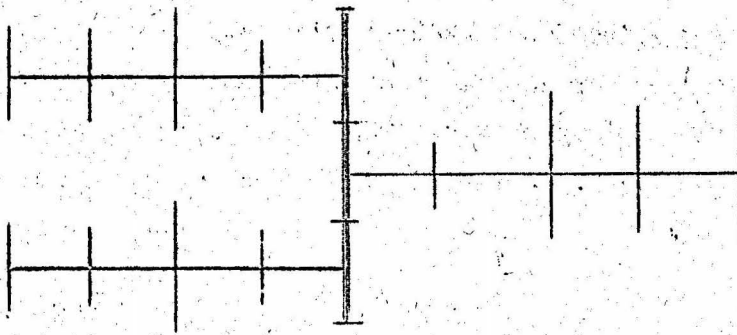


Abb. 6: Verzweigtes Drehschwingersystem mit einer Verzweigungsstelle

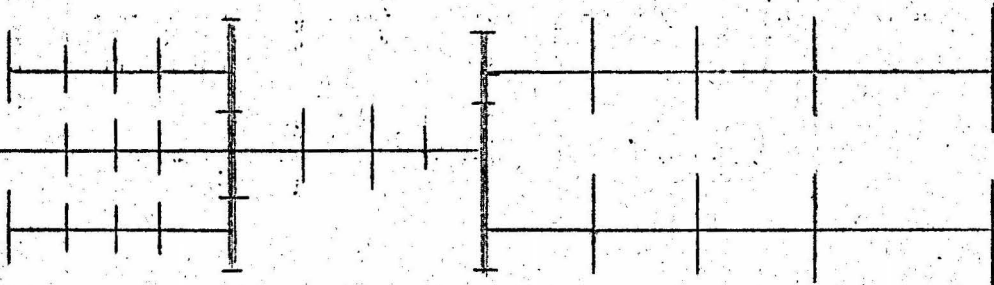


Abb. 7: Verzweigtes Drehschwingersystem mit zwei Verzweigungsstellen

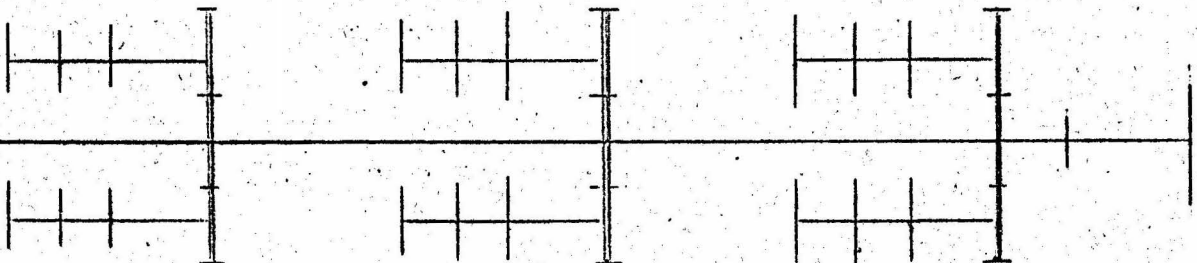


Abb. 8: Verzweigtes Drehschwingersystem mit drei Verzweigungsstellen

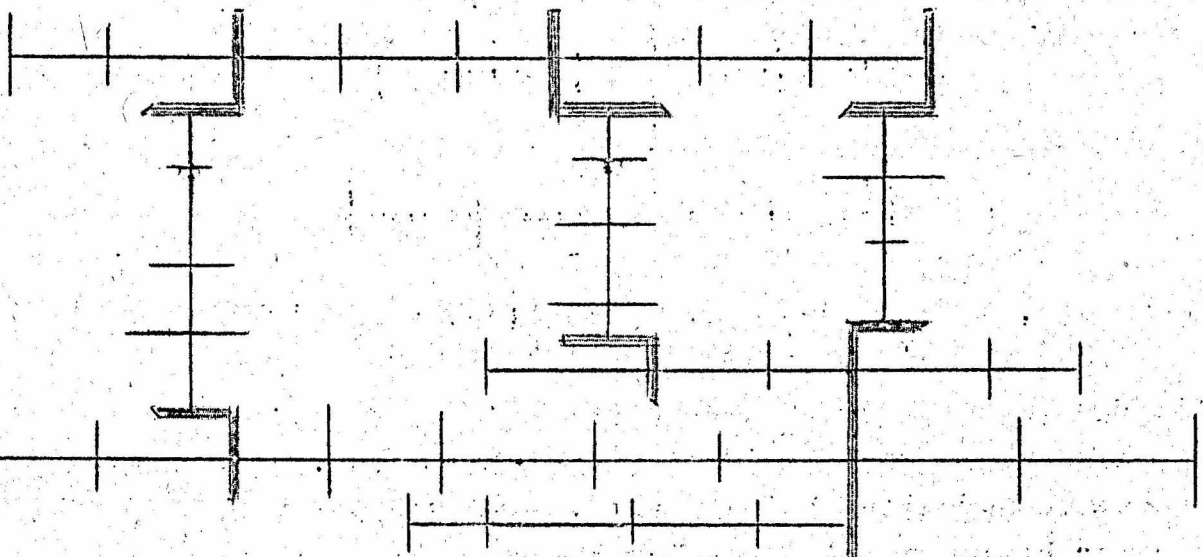


Abb. 9: Verzweigtes Drehschwingersystem mit sechs Verzweigungsstellen

Bei unserer Betrachtungsweise denken wir uns jedes verzweigte Drehschwingersystem in der Weise aus Elementarsystemen zusammengesetzt, daß jedes Elementarsystem in einer Verzweigungsstelle endet oder beginnt, wenn es nicht an einem Ende frei oder eingespannt ist.

Den allgemeinsten Fall einer Verzweigungsstelle zeigt Abb. 10.

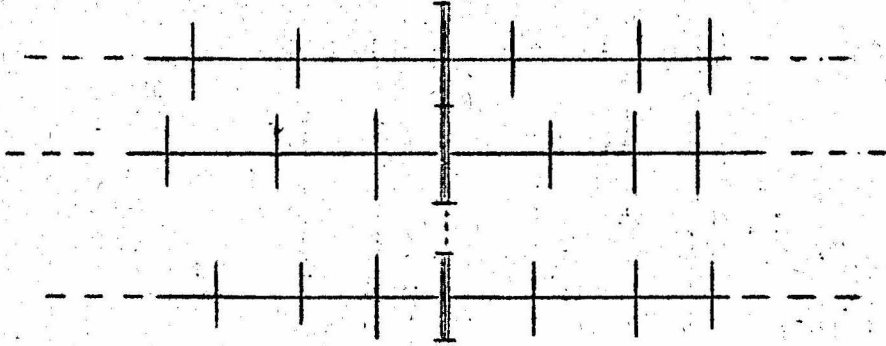


Abb. 10: Allgemeine Form einer Verzweigungsstelle

Bei prinzipiellen Betrachtungen denken wir uns die Drehmassen einer Verzweigungsstelle so aufgespalten, wie es Abb. 11 zeigt. Das Verhältnis, in dem die beiden zusammengehörenden Drehmassenteile dabei zueinander stehen, ist beliebig. Bei der numerischen Rechnung wird man stets die ganze Drehmasse entweder zum linken oder rechten Elementarsystem gehörig betrachten. Ein Teil der aufgespaltenen Drehmasse ist dabei also stets Null.

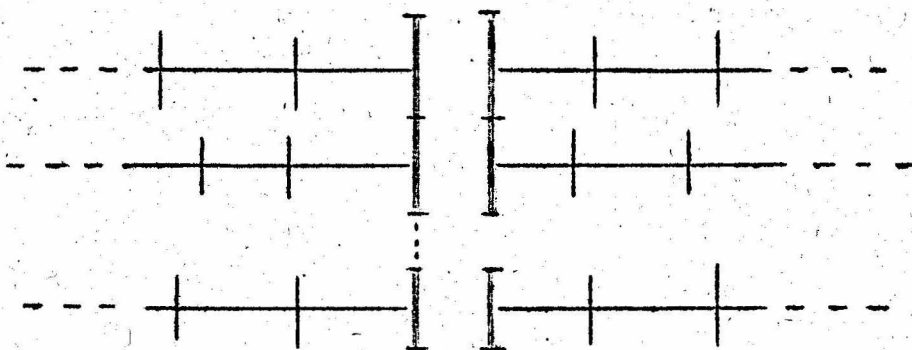


Abb. 11: Gedachte Aufspaltung: zweckmässig bei prinzipiellen Überlegungen

Beim Festlegen der Bezeichnungsweise jedes Elementarsystems sollte man es nach Möglichkeit immer so einrichten, daß alle Elementarsysteme auf einer Seite einer Verzweigungsstelle nur enden oder nur beginnen. Dies vereinfacht i.a. die Rechnung. Die vier möglichen Fälle, wie die einzelnen Elementarsysteme in einer Verzweigungsstelle enden bzw. beginnen können, sollen schließ-

lich in Abb. 12 veranschaulicht werden.

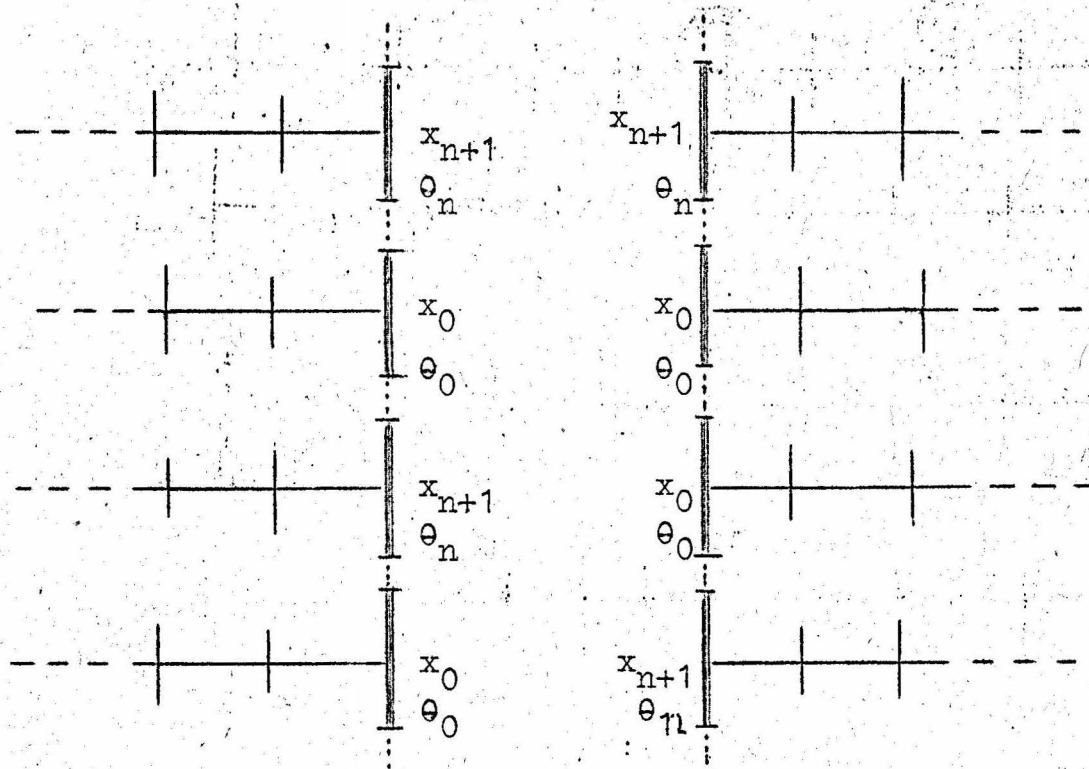


Abb. 12: Die vier möglichen Fälle, wie die einzelnen Elementarsysteme in einer Verzweigungsstelle enden bzw. beginnen können.

b) Aufstellung der Frequenzgleichung

Die Frequenzgleichung verzweigter Drehschwingersysteme ergibt sich bei unserer Betrachtungsweise im allgemeinsten Fall aus einer Reihe homogener Gleichungen, deren Anzahl gleich der Anzahl der Verzweigungsstellen ist. Man erhält jede dieser Gleichungen aus zwei Bedingungen, die an jeder Verzweigungsstelle erfüllt sein müssen. Diese Bedingungen sind:

Die Ausschlagsbedingung, welche besagt, daß die von den Zahnrädern in einer Verzweigungsstelle abgewälzten Bogenlängen einander gleich sein müssen, und
die Arbeitsbedingung, welche besagt, daß die Summe der einer Verzweigungsstelle zugeführten Arbeiten gleich null sein muss.

Wir wollen das an zwei Beispielen erläutern. Betrachten wir zunächst das System nach Abb. 13. Es hat nur eine Verzweigungsstelle. Auf der linken Seite der Verzweigungsstelle enden die Elementarsysteme (L_k) ($k = 1, 2, \dots, N$), auf der rechten Seite enden die Elementarsysteme (R_k) ($k = 1, 2, \dots, N$). Alle Elementarsysteme sind am Anfang frei ($x_{0Lk} = x_{0Rk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \dots, N$).

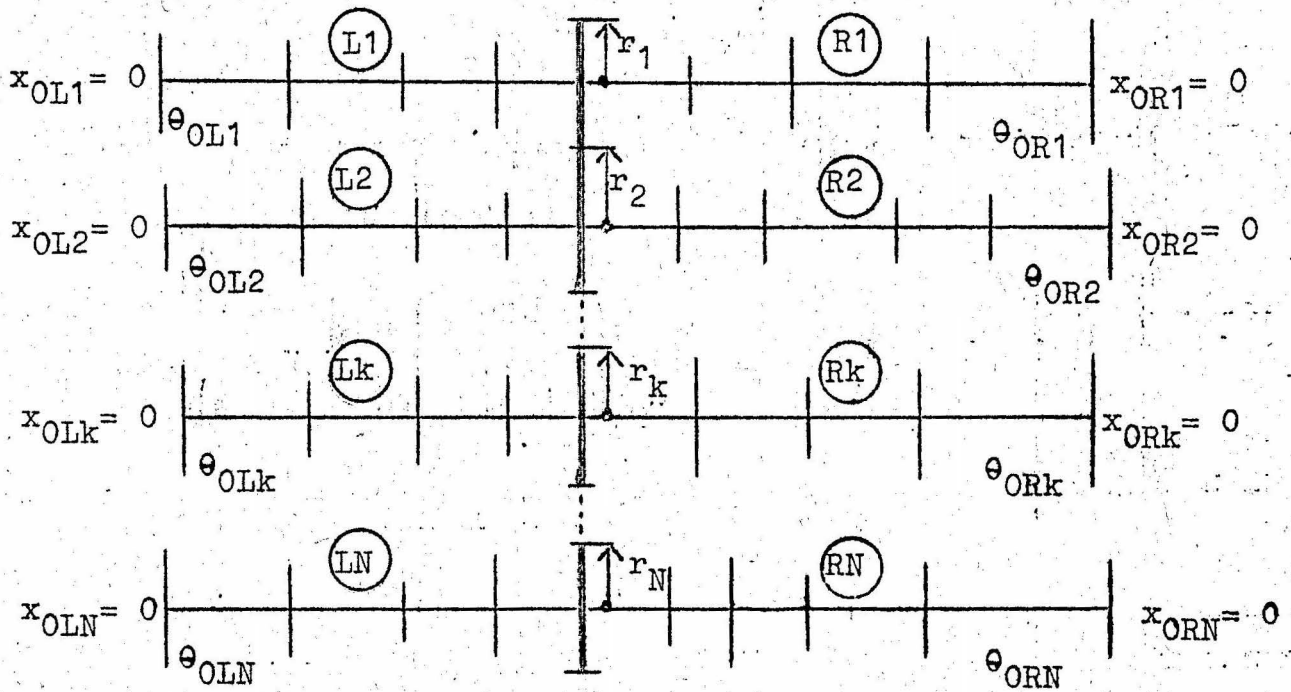


Abb. 13: System 1

Es sei b die in der Verzweigungsstelle abgewälzte Bogenlänge und r_k der zum k -ten Elementarsystem gehörige Radius des Teilkreises des Zahnrades mit der End-Drehmasse θ_{nLk} bzw. θ_{nRk} . Dann lautet die Ausschlagsbedingung

$$b = (-1)^{k-1} r_k u_{nLk} = (-1)^{k-1} r_k u_{nRk}. \quad (18.1)$$

Die Arbeitsbedingung ist

$$\sum_{k=1}^N (x_{n+1Lk} u_{nLk} + x_{n+1Rk} u_{nRk}) = 0 \quad (18.2)$$

(18.1) mit (18.2) liefert

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \frac{x_{n+1Lk} + x_{n+1Rk}}{r_k} = 0. \quad (18.3)$$

Wegen $x_{oLk} = 0$ gilt (vgl. (15.1)):

$$x_{n+1Lk} = u_{oLk} A_{n+1Lk} \quad (18.4)$$

und (vgl. (15.2)):

$$u_{nLk} = u_{oLk} B_{nLk} = (-1)^{k-1} \frac{b}{r_k}. \quad (18.5)$$

Aus (18.5) folgt

$$u_{OLk} = (-1)^{k-1} b \frac{1}{r_k^{B_{nLk}}} \quad (18.6)$$

(18.6) in (18.4) ergibt

$$x_{n+1Lk} = (-1)^{k-1} b \frac{A_{n+1Lk}}{r_k^{B_{nLk}}} \quad (18.7)$$

Ganz analog folgt

$$x_{n+1Rk} = (-1)^{k-1} b \frac{A_{n+1Rk}}{r_k^{B_{nRk}}} \quad (18.8)$$

Nach Einsetzen von (18.7) und (18.8) in (18.2) kommt schließlich die Frequenzgleichung:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{A_{n+1Lk}}{r_k^{2B_{nLk}}} + \frac{A_{n+1Rk}}{r_k^{2B_{nRk}}} \right) = 0. \quad (18.9)$$

Als zweites Beispiel soll ein System nach Abb. 14 dienen. Es hat zwei Verzweigungsstellen; b_I sei die in der ersten Verzweigungsstelle, b_{II} die in der zweiten Verzweigungsstelle abgewälzte Bogenlänge. Die Bezeichnung und Zuordnung der einzelnen Elementarsysteme (L_k) , (M_k) , (R_k) und der Teilkreisradien r_{kI} , r_{kII} ($k = 1, 2, \dots, N$) geht aus der Abbildung hervor.

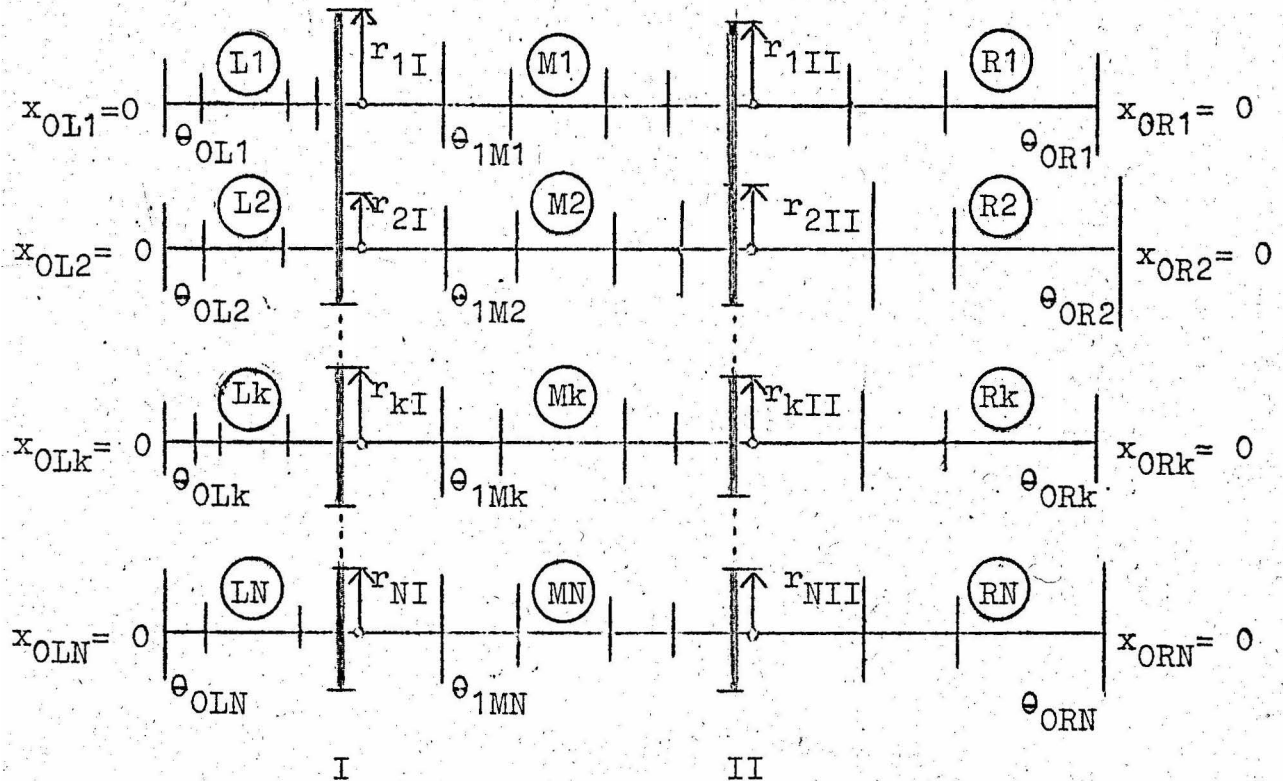


Abb. 14: System 2

Die Ausschlagsbedingungen für die beiden Verzweigungsstellen sind

$$b_I = (-1)^{k-1} r_{kI} u_{nLk} = (-1)^{k-1} r_{kI} u_{OMk}, \quad (19.1)$$

$$b_{II} = (-1)^{k-1} r_{kII} u_{nMk} = (-1)^{k-1} r_{kII} u_{nRk}. \quad (19.2)$$

Die Arbeitsbedingungen lauten

$$\sum_{k=1}^N (x_{n+1Lk} u_{nLk} - x_{OMk} u_{OMk}) = 0, \quad (19.3)$$

$$\sum_{k=1}^N (x_{n+1Rk} u_{nRk} + x_{n+1Mk} u_{nMk}) = 0. \quad (19.4)$$

(19.1) mit (19.3) und (19.2) mit (19.4) ergeben die Beziehungen

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \frac{1}{r_{kI}} (x_{n+1Lk} - x_{OMk}) = 0, \quad (19.5)$$

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \frac{1}{r_{kII}} (x_{n+1Rk} + x_{n+1Mk}) = 0. \quad (19.6)$$

Es kommt nun darauf an, diese letzten beiden Gleichungen unter Ausnutzung bekannter Beziehungen so umzuformen, daß aus ihnen ein homogenes Gleichungssystem mit den unbekannten Bogenlängen b_I und b_{II} wird. - Ganz analog zum ersten Beispiel erhält man für die seitlichen Systeme (Lk) bzw. (Rk) :

$$x_{n+1Lk} = (-1)^{k-1} b_I \frac{A_{n+1Lk}}{r_{kI} B_{nLk}}, \quad (19.7)$$

$$x_{n+1Rk} = (-1)^{k-1} b_{II} \frac{A_{n+1Rk}}{r_{kII} B_{nRk}} \quad (19.8)$$

Die Ausdrücke für die mittleren Systeme (Mk) sind etwas umfangreicher. Es ist, vgl. (15.1) und (15.2):

$$x_{n+1Mk} = x_{OMk} \alpha_{n+1Mk} + u_{OMk} A_{n+1Mk} \quad (19.9)$$

und
$$u_{nMk} = x_{OMk} \beta_{nMk} + u_{OMk} B_{nMk}. \quad (19.10)$$

Aus (19.1) bzw. (19.2) folgt

$$u_{OMk} = (-1)^{k-1} b_I \frac{1}{r_{kI}} \quad (19.11)$$

und

$$u_{nMk} = (-1)^{k-1} b_{II} \frac{1}{r_{kII}} \quad (19.12)$$

Durch Einsetzen von (19.11) und (19.12) in (19.10) erhält man

$$x_{0Mk} = (-1)^{k-1} \left(b_{II} \frac{1}{r_{kII} \beta_{nMk}} - b_I \frac{\beta_{nMk}}{r_{kI} \beta_{nMk}} \right) \quad (19.13)$$

(19.11), (19.12) und (19.13) in (19.9) eingesetzt, liefert:

$$x_{n+1Mk} = (-1)^{k-1} \left(b_I \frac{1}{r_{kI}} A_{n+1Mk} - \frac{\beta_{nMk}}{\beta_{nMk}} \alpha_{n+1Mk} + b_{II} \frac{\alpha_{n+1Mk}}{r_{kII} \beta_{nMk}} \right) \quad (19.14)$$

Mit (19.7), (19.8), (19.13) und (19.14) sowie (19.11) und (19.12) folgt aus (19.3) und (19.4) schließlich das homogene Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} b_I \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{kI}^2} \left(\frac{A_{n+1Ik}}{\beta_{nIk}} + \frac{\beta_{nMk}}{\beta_{nMk}} \right) - b_{II} \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{kI} r_{kII}} \frac{1}{\beta_{nMk}} &= 0, \\ b_I \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{kI} r_{kII}} \left(A_{n+1Mk} - \frac{\beta_{nMk}}{\beta_{nMk}} \alpha_{n+1Mk} \right) &+ b_{II} \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{kII}^2} \left(\frac{A_{n+1Rk}}{\beta_{nRk}} + \frac{\alpha_{n+1Mk}}{\beta_{nMk}} \right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (19.15)$$

das man auch kurz in der Form

$$\left. \begin{aligned} b_I a_{11} + b_{II} a_{12} &= 0, \\ b_I a_{21} + b_{II} a_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19.16)$$

schreiben kann. Die Frequenzgleichung lautet dann also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (19.17)$$

Auf Grund des Vorangegangenen dürfte prinzipiell geklärt sein, wie man im allgemeinsten Fall vorzugehen hat und daß man die Frequenzgleichung eines beliebigen verzweigten Drehschwingersystems dabei aus einer gleich Null zu setzenden Determinante erhält, deren Koeffizienten Funktionen von ξ sind:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

c) Lösung der Frequenzgleichung

Grundsätzlich kann man aus (20) die Frequenzgleichung explizit bestimmen. Aus der Determinante entsteht, allgemein geschrieben, die rationale Funktion

$$F(\zeta) = \frac{Z(\zeta)}{N(\zeta)} \quad (21.1)$$

in der $Z(\zeta)$ und $N(\zeta)$ Polynome in ζ sind. Wird

$$N(\zeta) \neq 0 \quad (21.2)$$

vorausgesetzt, so lautet die Frequenzgleichung

$$Z(\zeta) = 0. \quad (21.3)$$

Für das Aufsuchen der Nullstellen gilt dann das in Abschnitt 4b) Gesagte. Eine Untersuchung des Falles $N(\zeta) = 0$ wird in Abschnitt 4 vorgenommen. - Den expliziten Weg wird man bei der Berechnung einfacher verzweigter Systeme oft mit Erfolg einschlagen. Solche einfachen Systeme treten in der Praxis sehr häufig auf. Sie haben nur eine, höchstens zwei Verzweigungsstellen und bestehen aus wenigen Elementarsystemen, von denen viele gleich aufgebaut sind. Genaue Angaben darüber, wann es noch sinnvoll ist, diesen expliziten Weg zu beschreiten, sind jedoch unmöglich.

Im allgemeinen muß man implizit vorgehen, also im Sinne eines Restwertverfahrens: Man gibt eine Reihe von ζ -Werten vor und berechnet für jeden den Wert der Determinante. Dabei ist es zweckmäßig, die expliziten Ausdrücke A_{n+1} , B_n , α_{n+1} , β_n zu benutzen, weil man mit Hilfe des Hornerschemas sehr schnell und übersichtlich ihre Funktionswerte bestimmen kann. Wechselt der Determinantenwert zwischen zwei benachbarten ζ -Werten sein Vorzeichen, so liegt ein Eigenwert ζ_i dazwischen. Durch lineare Interpolation und Berechnung weiterer Determinantenwerte kann der Eigenwert beliebig genau bestimmt werden. - Wenn das verzweigte System nicht allzu kompliziert ist, kommt man mit einer Tischrechenmaschine zurecht. Es können auch mehrere Hilfskräfte zugleich rechnen und dadurch schneller zu den Eigenwerten vordringen. Bei komplizierten Systemen wird die Zuhilfenahme digitaler Rechenautomaten erforderlich. Die Ausdrücke A_{n+1} , B_n , α_{n+1} , β_n stellt man dann zweckmässigerweise nicht mehr explizit her, sondern läßt sie von vornherein für vorzugebende ζ -Werte berechnen, wobei man die einfach zu programmierende Matrizenmultiplikation benutzt. Auf das bekannte hierzu gehörende "Verfahren mit Übertragungsmatrizen" wird in Abschnitt 6 näher eingegangen.

d) Ausschlags- und Momentenverlauf

Auf Grund des mit (20) zusammenhängenden homogenen Gleichungssystems, kann man jede der in den einzelnen Verzweigungsstellen abgewälzten Bogenlängen durch eine dieser Bogenlängen ausdrücken. Für das verzweigte System nach Abb. 14 folgt aus (19.16) für einen Eigenwert ζ_i z.B.:

$$b_{II} = - b_I \frac{a_{11}(\zeta_i)}{a_{12}(\zeta_i)}. \quad (22.1)$$

Damit wird für dieses System gemäß

$$(19.1) : u_{OLk} = (-1)^{k-1} b_I \frac{1}{r_{kI} B_{nLk}(\zeta_i)}; \quad (22.2)$$

$$(19.2) : u_{ORk} = (-1)^{k-1} b_I \frac{a_{11}(\zeta_i)}{a_{12}(\zeta_i)} \frac{1}{r_{kII} B_{nRk}(\zeta_i)}; \quad (22.3)$$

$$(19.1) : u_{OMk} = (-1)^{k-1} b_I \frac{1}{r_{kI}}. \quad (22.4)$$

Aus (19.13) folgt

$$x_{OMk} = -(-1)^{k-1} b_I \left(\frac{a_{11}(\zeta_i)}{a_{12}(\zeta_i)} \frac{1}{r_{kII} B_{nMk}(\zeta_i)} + \frac{B_{nMk}(\zeta_i)}{r_{kI} B_{nMk}(\zeta_i)} \right). \quad (22.5)$$

Mit (22.2) bis (22.5) können somit alle Ausschläge und Momente gemäß (11.1) und (11.2) als Vielfache von b_I berechnet werden. - In ganz analoger Weise kann man Ausschlags- und Momentenverlauf eines beliebigen anderen Systems bestimmen.

4. Sonderfälle bei verzweigten Systemen.

In Abschnitt 3c) hatten wir die Frequenzgleichung in der Form (21.1) angegeben und für die weiteren Betrachtungen ihren Nenner $N(\zeta)$ verschieden von Null vorausgesetzt. Hier wollen wir kurz auf die Sonderfälle eingehen, die sich aus der Beziehung

$$N(\zeta) = 0 \quad (23)$$

ergeben können.

Betrachten wir zunächst das einfache System nach Abb. 13, für das sich die Frequenzgleichung (18.9) ergab. Bringt man (18.9) auf die Form (21.1), so erhält man für den Nenner ein Produkt, gebildet aus den Nennern der einzelnen Summanden:

$$N(\zeta) = \prod_{k=1}^1 r_k^2 B_{nLk} B_{nRk}. \quad (24.1)$$

Der Nenner verschwindet, wenn nur einer dieser Faktoren null ist. Es sei z.B. für den Wert ζ_e

$$B_{nLv}(\zeta_e) = 0, \quad (24.2)$$

wobei ein bestimmter Index von den Indizes $k = 1, 2, \dots, N$ sein soll. Dann folgt aus (18.5)

$$b = 0, \quad (24.3)$$

d.h. die Zahnräder in der Verzweigungsstelle schwingen nicht - wir wollen im folgenden einfach sagen: "Die Verzweigungsstelle ist in Ruhe". Außerdem gilt wegen (18.1):

$$u_{nLk} = 0 \quad \text{und} \quad u_{nRk} = 0 \quad (24.4)$$

oder, vgl. (18.5):

$$u_{OLk} B_{nLk} = 0 \quad \text{und} \quad u_{ORk} B_{nRk} = 0. \quad (24.5)$$

Nun wollen wir annehmen

$$B_{nLk}(\zeta_e) \neq 0, \quad B_{nLv} \text{ ausgenommen} \quad (24.6)$$

und

$$B_{nRk}(\zeta_e) \neq 0. \quad (24.7)$$

Dann gilt wegen (24.5):

$$u_{OLk} = 0, \quad \text{jedoch } u_{OLv} \neq 0 \quad \text{oder} \quad u_{OLv} = 0 \quad (24.8)$$

und

$$u_{ORk} = 0. \quad (24.9)$$

Aus (18.3) erhält man, vgl. (18.4):

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \frac{u_{OLk} A_{n+1Lk} + u_{ORk} A_{n+1Rk}}{r_k} = 0 \quad (24.10)$$

Wegen (24.8) und (24.9) kommt schließlich damit die Bedingung

$$u_{OLv} = 0. \quad (24.11)$$

Keines der Elementarsysteme (Lk) bzw. (Rk) kann also auf Grund der Voraussetzungen (24.6) und (24.7) schwingen.

Nimmt man jedoch an

$$B_{nLk}(\zeta_e) = B_{nRk}(\zeta_e) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (24.12)$$

dann ist wegen (24.5) vgl. (24.8)

$$u_{OLk} = 0 \quad \text{oder} \quad u_{OLk} \neq 0 \quad (24.13)$$

und

$$u_{ORk} = 0 \quad \text{oder} \quad u_{ORk} \neq 0$$

und man erkennt aus (24.10), dass eindeutige Aussagen über die u_{OLk} und u_{ORk} nicht mehr möglich sind. Die u_{OLk} und u_{ORk} müssen lediglich die Bedingung (24.10) erfüllen; man kann daher alle bis auf eine dieser Größen beliebig wählen. Die Drehmassen des verzweigten Systems nach Abb. 13 können also, (24.12) vorausgesetzt, Schwingungen mit der dem Eigenwert ζ_e zugehörigen Eigenfrequenz ausführen, obwohl die Verzweigungsstelle in Ruhe ist.

Auf Grund des Vorangegangenen dürfte es sich erübrigen, auf den Fall näher einzugehen, für den (24.12) nicht für alle k erfüllt ist.

Für die praktische Rechnung ist es natürlich wichtig zu wissen, welche der Polynome B_{nLk} und B_{nRk} gemeinsame Nullstellen haben. Diese Untersuchungen sind nur dann besonders einfach, wenn alle Polynome vom gleichen Grade sind (Koeffizientenvergleich!). Im ungünstigsten Falle müssen die Nullstellen einzeln berechnet werden.

Da die Nullstellen des Nennerpolynoms $N(\zeta)$ u.U. Eigenwerte des untersuchten Systems sind, wollen wir alle Gleichungen, die aus (23) hervorgehen können, als Nebenfrequenzgleichungen bezeichnen. Ihre anschauliche Bedeutung liegt, wie im bisherigen angedeutet, darin, dass sie diejenigen Eigenfrequenzen eines solchen verzweigten Systems liefern, in dem eine oder mehrere Verzweigungsstellen in Ruhe sein können.

Die einfachsten Nebenfrequenzgleichungen sind von der Art

$$B_n = 0, \quad \beta_n = 0, \quad \alpha_{n+1} = 0 \quad (25)$$

Man vergleiche hierzu die Abbildungen 3 bis 5! - Bei der Untersuchung des Systems nach Abb. 13 entstanden Nebenfrequenzgleichungen der Art $B_n = 0$. Bei einer Untersuchung des Systems nach Abb. 14 ergeben sich für den Fall $b_I = 0, b_{II} = 0$ die Nebenfrequenzgleichungen

$$B_{nLk} = 0, \quad B_{nMk} = 0, \quad B_{nRk} = 0; \quad (26.1)$$

für den Fall $b_I = 0$, $b_{II} = 0$ (vgl. (19.15)) die Nebenfrequenzgleichungen

$$B_{nLk} = 0, \quad \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{kII}^2} \left(\frac{A_{n+1Rk}}{B_{nRk}} + \frac{\alpha_{n+1Mk}}{\beta_{nMk}} \right) = 0 \quad (26.2)$$

und für den Fall $b_I = 0$, $b_{II} = 0$ die Nebenfrequenzgleichungen

$$B_{nRk} = 0, \quad \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_{kI}^2} \left(\frac{A_{n+1Lk}}{B_{nLk}} + \frac{B_{nMk}}{\beta_{nMk}} \right) = 0. \quad (26.3)$$

Man erkennt, daß die Bestimmung sämtlicher Eigenfrequenzen eines verzweigten Drehschwingersystems im allgemeinen sehr umfangreich ist. Erhebliche Vereinfachungen ergeben sich nur, wenn nahezu alle Elementarsysteme gleich aufgebaut sind. Es ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, auf weitere Einzelheiten einzugehen.

5. Zahlenbeispiele

Ein Zahlenbeispiel für unverzweigte Drehschwingersysteme findet man in der in der Zusammenfassung zitierten Arbeit des Verfassers. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel für ein verzweigtes System von dem Typ, der in Abb. 13 veranschaulicht ist:

Beispiel 1:

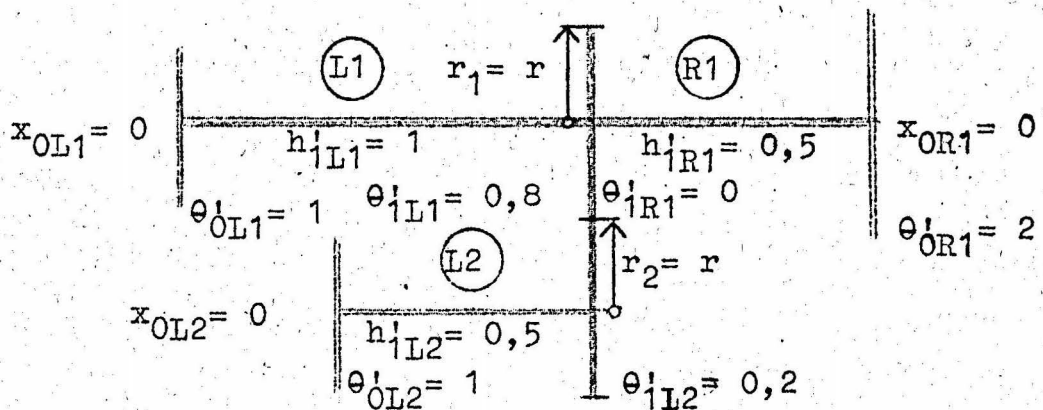


Abb. 15: Beispiel 1

Die Anwendung des A, B-Rechenschemas liefert

für das Elementarsystem (L1) : Für das Elementarsystem (L2) :

$\theta'_{OL1} = 1$		
$\theta'_{1L1} = 0,8$	$h'_{1L1} = 1$	
1,8	1	0,8

$\theta'_{OL2} = 1$		
$\theta'_{1L2} = 0,2$	$h'_{1L2} = 0,5$	
1,2	0,5	0,1

$$A_{n+1L1} = A_{2L1} = p(-0,8\zeta + 1,8)$$

$$A_{n+1L2} = A_{2L2} = p(-0,1\zeta + 1,2)$$

$$B_{nL1} = B_{1L1} = -\zeta + 1$$

$$B_{nL2} = B_{1L2} = -0,5\zeta + 1$$

Für das Elementarsystem (R1) :

$\theta'_{OR1} = 2$		
$\theta'_{1R1} = 0$	$h'_{1R1} = 0,5$	
2	1	0

$$A_{n+1R1} = A_{2R1} = p \cdot 2$$

$$B_{nR1} = B_{1R1} = -\zeta + 1$$

Die Frequenzgleichung lautet also gemäß (18.9) :

$$\frac{p(-0,8\zeta + 1,8)}{r^2(-\zeta + 1)} + \frac{p(-0,1\zeta + 1,2)}{r^2(-0,5\zeta + 1)} + \frac{p \cdot 2}{r^2(-\zeta + 1)} = 0,$$

$$\frac{p}{r^2} \cdot \frac{-0,8\zeta + 3,8}{-\zeta + 1} + \frac{-0,1\zeta + 1,2}{-0,5\zeta + 1} = 0,$$

$$\frac{p}{r^2} \cdot \frac{0,5\zeta^2 - 4,0\zeta + 5,0}{(-\zeta + 1)(-0,5\zeta + 1)} = 0.$$

Wird der Nenner (vgl. (21.2)) von Null verschieden vorausgesetzt, so ergeben sich die Eigenwerte

$$\left. \begin{array}{l} \zeta_0 = 0 \\ \zeta_1 = 4 - \sqrt{6} \\ \zeta_2 = 4 + \sqrt{6} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wegen } p = c^* \zeta, \\ \text{aus der quadratischen Gleichung} \\ 0,5\zeta^2 - 4,0\zeta + 5,0 = 0. \end{array}$$

Aus der Bedingung $N(\zeta) = 0$ (s. Abschn. 4) folgenden die Nebenfrequenzgleichungen

$$-\zeta + 1 = 0 \quad \text{und} \quad -0,5\zeta + 1 = 0$$

mit den Nullstellen $\zeta = 1$ und $\zeta = 2$. Der Wert $\zeta = 2$ ist kein

Eigenwert, weil $B_{nL1}(\zeta = 2) \neq 0$, $B_{nR1}(\zeta = 2) \neq 0$, demzufolge $u_{OL1} = u_{OR1} = 0$ und daher (wegen (24.10)) auch $u_{OL2} = 0$, alle Drehmassen also in Ruhe sind. - Hingegen ist $\zeta = 1$ ein Eigenwert:

Wegen $B_{nL2}(\zeta = 1) \neq 0$, ist $u_{OL2} = 0$; mit (24.10) folgt somit

$$\frac{u_{OL1} A_{n+1L1}(\zeta = 1)}{r} : \frac{u_{OR1} A_{n+1R1}(\zeta = 1)}{r} = 0,$$

$$u_{OL1} p(-0,8 + 1,8) + u_{OR1} p \cdot 2 = 0,$$

$$u_{OL1} = -2u_{OR1}.$$

u_{OL1} und u_{OR1} können wegen $B_{nL1}(\zeta = 1) = B_{nR1}(\zeta = 1) = 0$ verschieden von Null sein.

Die Ausschlagsamplitude u_{OL1} der Drehmasse θ_{OL1} bei einer Eigenschwingung mit dem Eigenwert $\xi_1 = 4 - \sqrt{6}$ erhält man mit (18.6) zu

$$u_{OL1} = b \frac{1}{r_{B_{nL1}}} = b \frac{1}{r(-\xi_1 + 1)} = b \frac{1}{r(-3 + \sqrt{6})} = - \frac{3 + \sqrt{6}}{3r} b$$

Das Moment in dem Wellenstück mit der Torsionsnachgiebigkeit h_{1L1} ergibt sich somit bei der gleichen Eigenschwingung zu

$$x_{1L1} = u_{OL1} A_{1L1} = u_{OL1} p = - \frac{3 + \sqrt{6}}{3r} b \frac{1}{h^*(4 - \sqrt{6})} = - \frac{6 + \sqrt{6}}{3rh^*} b.$$

Die Ermittlung der Ausschläge und Momente bei den einzelnen Eigenschwingungen dürfte damit hinreichend geklärt sein.

Beispiel 2 :

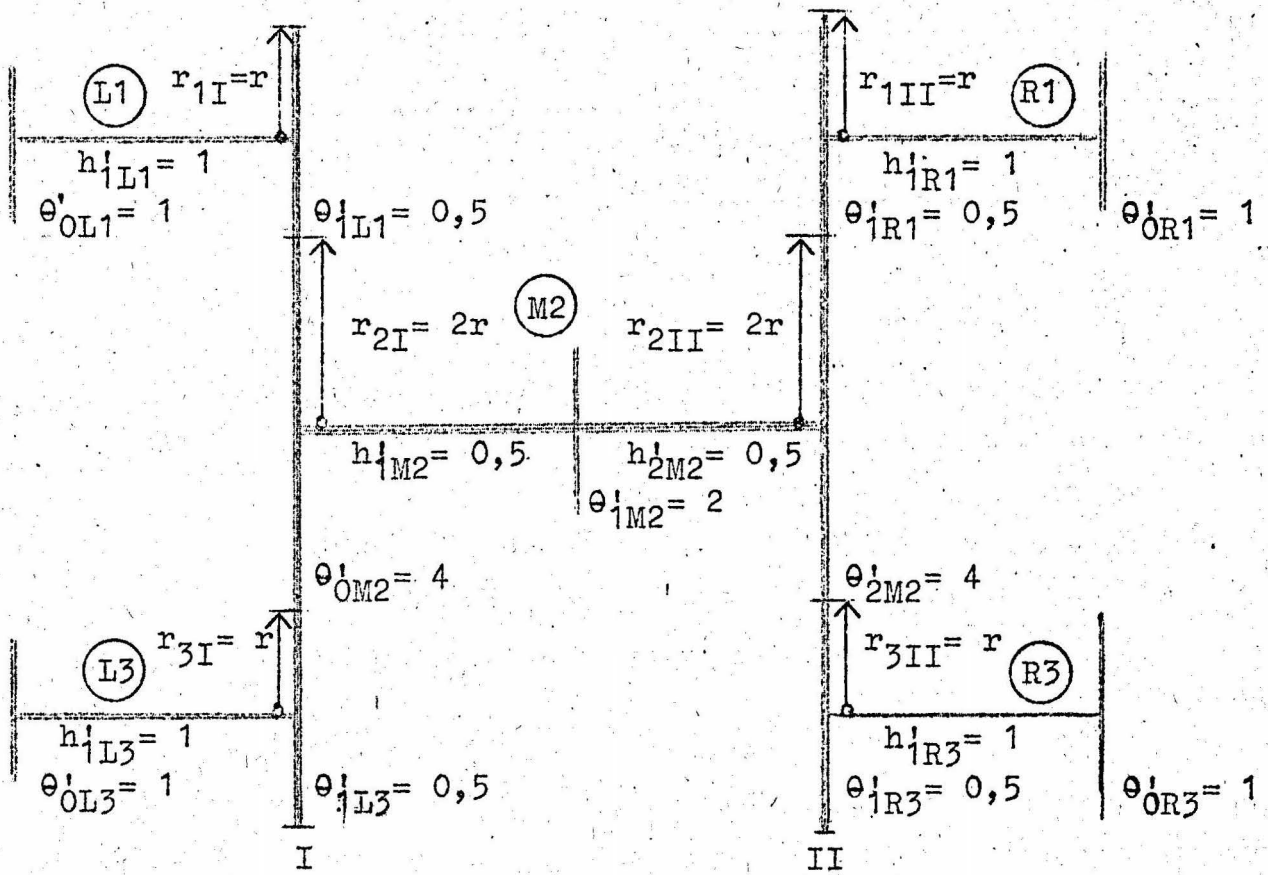


Abb. 16 : Beispiel 2

Es handelt sich um ein verzweigtes System von dem in Abb. 14 dargestellten Typ. Die Anwendung des A,B-Rechenschemas liefert für die Elementarsysteme $(L1)$, $(L3)$, $(R1)$ und $(R3)$:

$\theta_0' = 1$	$h_1' = 1$	
$\theta_1' = 0,5$		
1,5	1	0,5

$$A_{n+1L1} = A_{n+1L3} = A_{n+1R1} = A_{n+1R3} = p(-0,5\zeta + 1,5)$$

$$B_{nL1} = B_{nL3} = B_{nR1} = B_{nR3} = -\zeta + 1.$$

Für das Elementarsystem (M2) werden das A,B- und das α, β -Rechen-
schema benötigt:

$\theta'_0 = 4$	$h'_1 = 0,5$			$h'_2 = 0,5$		
$\theta'_1 = 2$						
6	2	4				
$\theta'_2 = 4$	3	20				
10	5	24	2	8		

$h'_1 = 0,5$	1	$\theta'_1 = 2$		
$h'_2 = 0,5$	4	$\theta'_2 = 4$		
1	5	0,5	2	

$$\alpha_{n+1M2} = 2\zeta^2 - 5\zeta + 1$$

$$B_{nM2} = -h^*(-0,5\zeta + 1)$$

$$A_{n+1M2} = p(8\zeta^2 - 24\zeta + 10)$$

$$B_{nM2} = 2\zeta^2 - 5\zeta + 1$$

Damit kann entsprechend (19.15) das homogene Gleichungssystem

$$b_I \left(\frac{2p(-0,5\zeta + 1,5)}{r^2(-\zeta + 1)} + \frac{2\zeta^2 - 5\zeta + 1}{-4r^2 h^*(-0,5\zeta + 1)} \right) - b_{II} \frac{1}{4r^2} \frac{1}{-h^*(-0,5\zeta + 1)} = 0,$$

$$b_I \frac{1}{4r^2} \left(p(8\zeta^2 - 24\zeta + 10) - \frac{2\zeta^2 - 5\zeta + 1}{-h^*(-0,5\zeta + 1)} (2\zeta^2 - 5\zeta + 1) \right) + b_{II} \left(\frac{2p(-0,5\zeta + 1,5)}{r^2(-\zeta + 1)} + \frac{2\zeta^2 - 5\zeta + 1}{-4r^2 h^*(-0,5\zeta + 1)} \right) = 0$$

aufgestellt werden.

Nach kurzer Rechnung folgt:

$$b_I \frac{4\zeta^3 - 17\zeta^2 + 18\zeta - 1}{(\zeta - 1)(2\zeta - 4)} - b_{II} \frac{1}{2\zeta - 4} = 0,$$

$$b_I \frac{1}{2\zeta - 4} + b_{II} \frac{4\zeta^3 - 17\zeta^2 + 18\zeta - 1}{(\zeta - 1)(2\zeta - 4)} = 0.$$

Die Frequenzgleichung ergibt sich damit zu

$$\frac{4\zeta^3 - 17\zeta^2 + 18\zeta - 1}{(\zeta - 1)(2\zeta - 4)} - \frac{1}{2\zeta - 4} = 0.$$

Unter Verwendung der Beziehung $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ wird daraus:

$$\frac{4\zeta^3 - 17\zeta^2 + 17\zeta}{(\zeta - 1)(2\zeta - 4)} - \frac{4\zeta^3 - 17\zeta^2 + 19\zeta - 2}{(\zeta - 1)(2\zeta - 4)} = 0,$$

$$\frac{\zeta(4\zeta^2 - 17\zeta + 17)(\zeta - 2)(4\zeta^2 - 9\zeta + 1)}{(\zeta - 1)^2(2\zeta - 4)^2} = 0.$$

$$(\zeta - 1)^2(2\zeta - 4)^2$$

Wird der Nenner verschieden von Null vorausgesetzt, so erhält man die Eigenwerte derjenigen Eigenschwingungen, bei denen die Zahnräder beider Verzweigungsstellen schwingen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= 0 \\ \zeta_1 &= \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{65} \\ \zeta_2 &= \frac{9}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{65} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{aus der quadratischen Gleichung} \\ 4\zeta^2 - 17\zeta + 17 = 0. \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_3 &= \frac{17}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{17} \\ \zeta_4 &= \frac{17}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{17} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{aus der quadratischen Gleichung} \\ 4\zeta^2 - 9\zeta + 1 = 0. \end{array}$$

Die Ermittlung des Ausschlags- und Momentenverlaufs kann an Hand des Abschnitts 3d) erfolgen. Eine Untersuchung der Nebenfrequenzgleichungen (vgl. Abschn. 4) ergibt, daß lediglich Eigenschwingungen mit dem Eigenwert $\zeta = 1$ möglich sind. Dabei ist stets $b_I = b_{II} = 0$, $u_{OL1} = u_{OL3}$, $u_{OR1} = u_{OR3}$ und $u_{OM2} = x_{OM2} = 0$.

6. Berechnung mit Übertragungsmatrizen

Wir schließen uns hier der Darstellung von K. Klotter¹⁾ an und kennzeichnen die übernommenen Formeln durch "Klotter (...)". Beispielsweise erhält man Ausschlag und Drehmoment unmittelbar rechts hinter der vierten Drehmasse eines Elementarsystems nach Klotter (7.21/21b) und (7.22/2) aus dem Zustandsvektor \bar{y}_3^r :

$$\bar{y}_3^r = \bar{u}_3^r \bar{u}_2^r \bar{u}_1^r \bar{y}_0^1 = \begin{bmatrix} u_3 \\ h^* x_4 \end{bmatrix}. \quad (27.1)$$

\bar{u}_3^r , \bar{u}_2^r und \bar{u}_1^r sind Übertragungsmatrizen; die tiefgestellten Indizes 1, 2, 3 weisen auf die Indizes der Drehmassen θ_1 , θ_2 und θ_3 hin, das hochgestellte r soll andeuten, dass der Zustand (Ausschlag und Drehmoment) unmittelbar rechts hinter der Drehmasse θ_1 , θ_2 bzw. θ_3 bei der Multiplikation "übertragen" wird; der Querstrich soll darauf hinweisen, dass die Elemente der Matrizen dimensionslos sind - die für die Einführung dieser dimensionslosen Elemente erforderlichen Maßnahmen sind in dem zitierten Buch von K. Klotter und in dieser Arbeit die gleichen; auch die Bezeichnungsweise stimmt überein. - Allgemein ist mit

¹⁾ K. Klotter, Technische Schwingungslehre, Bd. 2, S. 417 ff., 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960.

Klötter (7.21/20), vgl. (8) und (9):

$$\bar{u}_\lambda^r = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_\lambda}{h^*} \\ \zeta \frac{\theta_\lambda}{\theta^*} & 1 - \zeta \frac{\theta_\lambda}{\theta^*} \frac{h_\lambda}{h^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h'_\lambda \\ \theta'_\lambda & 1 - \zeta \theta'_\lambda h'_\lambda \end{bmatrix}. \quad (27.2)$$

($\lambda = 1, 2, \dots, n$)

\bar{p}_0 ist die zu θ_0 gehörige Punktmatrix. Mit Klötter (7.21/11) ist

$$\bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta'_0 \zeta & 1 \end{bmatrix}. \quad (27.3)$$

\bar{y}_0^1 ist der Zustandsvektor unmittelbar links vor der Drehmasse θ_0 .

Es ist im allgemeinen Fall

$$\bar{y}_0^1 = \begin{bmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & h^* x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ x_0 \end{bmatrix}. \quad (27.4)$$

Auf Grund dieser Angaben können alle Ausschläge und Momente berechnet werden. Ausschlag und Moment am Ende eines Elementarsystems ergeben sich aus dem Zustandsvektor

$$\bar{y}_n^r = \bar{u}_n^r \bar{u}_{n-1}^r \dots \bar{u}_1^r \bar{p}_0 \bar{y}_0^1 = \begin{bmatrix} u_n \\ h^* x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (27.5)$$

und man erkennt

$$\bar{y}_n^r = \begin{bmatrix} u_0 B_n + x_0 \beta_n \\ h^* (u_0 A_{n+1} + x_0 \alpha_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_n & \beta_n \\ h^* A_{n+1} & h^* \alpha_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ x_0 \end{bmatrix}. \quad (27.6)$$

Damit ist geklärt, wie man die Werte A_{n+1} , α_{n+1} , B_n und β_n und damit x_{n+1} und u_n mit Hilfe der Matrizenmultiplikation bestimmen kann. Der Zusammenhang mit den vorangegangenen Abschnitten ist dadurch hergestellt. Man wird, wie in Abschnitt 3c) bereits erwähnt, die Verfahren mit Übertragungsmatrizen vor allem dann heranziehen, wenn die Rechnung von digitalen Rechenautomaten durchgeführt werden soll.

7. Vorteile gegenüber anderen Methoden; abschließende Bemerkungen.

Eine Zusammenfassung und einen Vergleich aller wesentlichen Verfahren, die zur Berechnung der Eigenschwingungen unverzweigter Drehschwingersysteme entwickelt wurden, findet man in einem Bericht von K. Klotter¹⁾. Unter Bezugnahme auf diesen Bericht wurden die Vorteile der hier beschriebenen Methoden zur Berechnung unverzweigter Drehschwingersysteme bereits in der in der Zusammenfassung zitierten Arbeit des Verfassers beschrieben. Der Hauptvorteil besteht darin, dass man die Frequenzgleichung sehr schnell und übersichtlich aufstellen kann.

Verfahren zur Berechnung der Eigenschwingungen verzweigter Drehschwingersysteme sind vor allem von R. Grammel und S. Falk entwickelt worden. Die hier beschriebenen Methoden haben gegenüber denen von R. Grammel²⁾ den Vorteil, dass ihre Anwendbarkeit nicht von einem speziellen Aufbau der Drehschwingersysteme abhängt. Einem ersten von S. Falk³⁾ entwickelten Verfahren, bei dem jedes verzweigte System auf ein oder mehrere unverzweigte Systeme "abgebildet" wird, dürften sie hinsichtlich Rechenaufwand und Übersichtlichkeit überlegen sein. Dem zweiten von S. Falk⁴⁾ angegebenen Verfahren, bei dem Übertragungsmatrizen verwendet werden (vgl. Abschn. 6), ist das hier beschriebene Vorgehen dann rechnerisch und zeitlich überlegen, wenn die Frequenzgleichung explizit aufgestellt werden soll; auch dann, wenn dieses Verfahren zur Herstellung von Restwerten angewandt wird und man dabei Tischrechenmaschinen benutzt (vgl. Abschn. 3c). Benutzt man digitale Rechenautomaten, so sind die Verfahren mit Übertragungsmatrizen - wegen der guten Programmierungsmöglichkeiten - zweifellos die geeignetsten. Der prinzipielle Gedankengang des in Abschn. 3b) geschilderten Vorgehens - Aufstellung eines homogenen Gleichungssystems mit den in den Verzweigungsstellen abgewälzten Bogenlängen als Unbekannten - ist auch dann vorteilhaft, weil er ohne weiteres auf Systeme mit beliebig vielen Verzweigungsstellen einheitlich und übersichtlich anwendbar ist und die Untersuchung der in Abschnitt 4 behandelten Sonderfälle erleichtert - S. Falk und K. Klotter behandeln bei den zitierten Verfahren mit Übertragungsmatrizen nur Systeme mit einer Verzweigungsstelle.

1) K. Klotter, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 1

2) C.B. Biezeno u.R. Grammel, Technische Dynamik, Bd.2, S.378 ff., 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg (1953).

3) S. Falk, Ing.-Arch.23 (1955) S. 314

4) S. Falk, VDI-Berichte Bd. 30 (1958) S. 65